Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

استخدام تربيعة جاوس في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة والمتعددة وتطبيقاتها

سليمة محمد خضر

قسم الرياضيات– كلية التربية– جامعة مصراتة

Skhader26@yahoo.com

الملخص:

تهدف هذه الورقة البحثية إلى دراسة تربيعة جاوس في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة والمتعددة وتطبيقاتها، وقد ربطنا كل نوع ببرنامج لغرض التوصل إلى الحل بسهولة.

ولقد كتبت البرامج الموجودة في هذه الورقة باستخدام لغة Q. basic الطبعة ((4.5)) وعلى حاسبات بانتيوم ذات السرعة 600MHZ.

Abstract:

In this paper we study Gaussion Quadrature to find numerical solutions of the Single and multiple Integrations and their applications . We connect each type by a program to easily get the Solution.

All the programs in this paper were written by Q. basic language version 4.5 and on bantium computers with 600 MHZ.

المقدمة:

غالبا ما نحتاج إلى حساب التكامل المحدد لدالة ليس لها علاقة عكسية صريحة للتفاضل أو يكون حساب العلاقة العكسية للتفاضل ليس سهلا.

إن مسألة إيجاد قيمة: $I = \int_a^b f(x)dx$

على فترة محددة $[a, b]$ هي إحدى المسائل التي تظهر كثيرا في الرياضيات.

فإذا وجدت دالة f تحقق $f' = f$ فإن $f(b) - f(a)$ هي قيمة هذا التكامل. ولسوء الحظ، قد يكون من الصعوبة بمكان، (إن لم يكن مستحيلا) في المسائل العملية إيجاد تعبير صريح للدالة f فقد تكون الدالة f معلومة فقط عند مجموعة متفرقة من النقاط، وفي هذه الحالة فإن المعالجة العددية لإيجاد التكامل تكون ضرورية.

1) تربيعة جاوس:

Gaussion Quadrature

إن القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ في الفترة $[\,a\,,b\,]$ والثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ يتم اختيارها لتقليل الخطأ الذي يتم الحصول عليه في حساب:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\ f(x_i)$$

حيث f دالة اختيارية.

إن القيم $c_1, c_2, \dots, c_n$ اختيارية، والقيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ يجب أن تقع داخل فترة التكامل، وهكذا يمكن اختيار (2n) وسيطاً، إذا اعتبرنا عوامل متعددة الحدود وسيطات، فإن فئات متعددات الحدود من الدرجة (2n−1) تحتوي على (2n) وسيط، وبالتالي فإن الاختيار المناسب للقيم والثوابت على هذه الفئة يعطي تربيعة جاوس القيمة مضبوطة.

ولتوضيح الطريقة من أجل الاختيار المناسب للوسطاء، نوضح كيفية اختيار النقاط والثوابت في حالة n=2 وفترة التكامل $[-1\,,1\,]$ نفرض أننا نريد تحديد $c_1\,,c_2\,,x_1\,,x_2$ وتكون صيغة التكامل.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1\, f(x_1) + c_2\, f(x_2)$$

يعطي النتيجة الدقيقة عندما تكون $f\,(x)$ متعددة الحدود من الدرجة $(2n-1)$.

أي $2(2)-1=3$ أو أقل أي أن:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,.$$

لبعض الثوابت $a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3$.

بسبب أن:

$$\int (a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,)dx$$
$$= a_0\!\int dx + a_1\!\int xdx + a_2\!\int x^2dx + a_3\!\int x^3dx\,.$$

وهذا يكافئ أن الصيغة تعطي نتائج مضبوطة عندما تكون:

$$f(x) = 1\,,x\ ,x^2\,,x^3\,.$$

والشرط الذي يجب تحقيقه هو أننا نحتاج إلى c_1 , c_2 , x_1 , x_2 بحيث أن:

$$c_1\ (1) + c_2\ (1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2\ .$$

$$c_1\ (x_1) + c_2\ (x_2) = \int_{-1}^{1} xdx = 0\ .$$

$$c_1\ (x_1^2) + c_2\ (x_2^2) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}\ .$$

$$c_1\ (x_1^3) + c_2\ (x_2^3) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0\ .$$

ونحصل على نظام المعادلات التالي:

$$c_1 + c_2 = 2\ .$$
$$c_1\, x_1 + c_2\, x_2 = 0\ .$$
$$c_1\, x_1^2 + c_2\, x_2^2 = \frac{2}{3}\ .$$
$$c_1\, x_1^3 + c_2\, x_2^3 = 0\ .$$

وحل نظام المعادلات هذا يكون:

$$c_1 = 1\, ,\ c_2 = 1\, ,\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ ,\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

وهكذا تكون الصيغة

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ .$$

هذه الصيغة تعطي النتيجة المضبوطة للتكامل إذا كانت $f(x)$ متعددة الحدود من الدرجة الثالثة أو أقل. وأنه من الصعب أن تجد حلول جبرية لنظام المعادلات المستخرج وخصوصاً عندما تكون n كبيرة (أي متعددات حدود من درجات أعلى) لذلك تم اللجوء إلى طريقة خياريه أو بديله يمكن استخدامها للحصول على النقاط والثوابت بصورة بسيطة.

وهكذا فإننا سندرس متعددات الحدود المتعامدة وهي أن " تكامل محدود لحاصل ضرب أي دالتين يساوي صفر ".

إن اعتماد الثوابت x_i , c_i على قيمتي a, b تُعد من إحدى النتائج السيئة للتكاملات الجاوسية، لأنه في كل مرة نستخدم فيها فترة تكامل جديدة فإنه يجب إعادة حساب هذه القيم. وقد أمكن تذليل هذه المشكلة بدرجة كبيرة وذلك باستخدام التعويض $t = (2x - a - b)/(b - a)$ لتحويل التكاملات لنحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\,[\frac{(b-a)t + a + b}{2}]\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

وتعرف كثيرات الحدود المتعامدة على الفترة $[-1, 1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = 1$ بكثيرات حدود لاجندر، وهو التجمع $\{p_0 , p_1 , p_2 , \dots\}$ ولها الخواص التالية:

1. لكل اختيار n تكون p_n متعددة الحدود من الدرجة أقل من n.

2. $\int_{-1}^{1} p(x)p_n(x)dx = 0$ كلما كانت $p(x)$ متعددة الحدود من الدرجة أقل من n.

بعض متعددات حدود لاجندر هي:

$$p_0(x) = 1 \ , \ p_1(x) = x \ , \ p_2(x) = x^2 - {}^1\!/_3 \ .$$

$$p_3(x) = x^3 - \left({}^3\!/_5\right)x \ , \ p_4(x) = x^4 - \left({}^6\!/_7\right)x^2 + {}^3\!/_{55} \, .$$

جذور متعددات الحدود هذه مختلفة وتقع داخل الفترة $(-1, 1)$ ومتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل وهي مناسبة لاختيار الوسيطات لتربيعية جاوس.

العقد $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ يتم الاحتياج إليها للحصول على صيغة التكامل التقريبية لتعطي نتائج مضبوطة للحدودية التي درجتها أقل من 2n وهي جذور حدودية لاجندر من الدرجة n، وتم التحقق من ذلك في النظرية التالية.

نظرية:

لنفرض أن $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ جذور حدودية لاجندر من الدرجة n، ولكل $i = 1, 2, \dots , n$ تكون الأعداد c_i معرفة كما يلي:

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{J=1 \\ J\neq 1}}^{n} \frac{x - x_J}{x_i - x_J} dx$$

إذا كانت p حدودية من الدرجة أقل من 2n، فإن

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\, p\,(x_i)$$

البرهان:

لنبحث أولاً الحدودي $R(x)$ من الدرجة أقل من n ونعيد كتابة $R(x)$ على شكل n−1 من حدوديات لاجندر بعقد عند حدود حدودية لاجندر p_n من الدرجة n .

هذا التمثيل للحدودية $R(x)$ مضبوطاً لأن حد الخطأ في المشتقات من الرتبة n للدالة R والمشتقات من الرتب n للدالة R عند الصفر.

إذن

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \int_{-1}^{1} [\sum_{i=1}^{n} \prod_{J=1}^{n} \frac{x - x_J}{x_i - x_J} R\,(x_i)\,]\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\int_{-1}^{1} \prod_{J=1}^{n} \frac{x - x_J}{x_i - x_J}\, dx\,]\, R\,(x_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, R\,(x_i)$$

هذا يحقق نتيجة الحد وديات من الدرجة أقل من n .

إذا كانت الحدودية $p(x)$ من الدرجة أقل من 2n قد قسمت على حدودية لاجندر $p_n(x)$ من الدرجة n، فإننا نحصل على حدوديات $Q\,(x)$ و $R\,(x)$ من الدرجة أقل من n حيث أن

$$p(x) = Q(x)\, p_n(x) + R(x)$$

نجتاز الآن القوة الوحيدة لحدوديات لاجندر.

أولاً درجة $Q\,(x)$ أقل من n ، ولهذا (من الخاصية 2)

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\, p_n(x)\;\, dx = 0$$

الآن حيث أن x_{i} جذور للحدودية $p_n(x)$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ ، فإنه يكون لدينا

$$p(x_i) = Q(x_i)\, p_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$$

وأخيراً حيث أن $R(x)$ حدودية من الدرجة أقل من n، فإن ذلك يؤدي إلى:

$$\int_{-1}^{1} R(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\, R\,(x_i)$$

وضع هذه الحقائق جميعاً يحقق أن الصيغ مضبوطة للحدودية $p(x)$.

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} [\, Q(x)\, p_n(x) + R(x)\,]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} R(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\, R\,(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, p\,(x_i)$$

الثوابت c_i التي نحتاج إليها في قاعدة التربيع يمكن الحصول عليها من النظرية أعلاه ولكن كل من الثوابت والجذور لحدوديات لاجندر وضعت في جدول شامل ...

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

الجدول التالي به قائمة لهذه القيم لـ $n = 2 , 3 , 4 , 5$.

n	الجذور " t_i "	المعاملات " c_i "	درجة متعددة الحدود
2	0.57735027 -0.57735027	1.00000000 1.00000000	3
3	0.77459667 0.00000000 0.00000000	0.55555555 0.88888888 0.55555555	5
4	0.86113631 0.33998104 -0.33998104 -0.86113631	0.34785485 0.65214515 0.65214515 0.34785485	7
5	0.90617975 0.53846931 0.00000000 -0.53846931 -0.90617975	0.23692689 0.47862867 0.56888889 0.47862867 0.23692689	9

جدول (1)

(المعاملات والجذور الخاصة بتربيعية جاوس)

بما أن التحويل الخطي $t = [1 / (b - a)][2x - a - b]$ يحول الفترة $[a, b]$ إلى فان متعددة حدود لاجندر يمكن استخدامها لتقريب $[-1 , 1]$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\,[\frac{(b-a)t+a+b}{2}]\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

لأي دالة يمكن حسابها عند النقط المطلوبة .

مثال (1) : باستخدام طريقة تربيعة جاوس لتقريب التكامل الآتي $\int_0^2 e^x\, dx$ عندما $n = 4$

الحل

$$x=\frac{(b-a)t+a+b}{2}=\frac{(2-0)t+0+2}{2}=\frac{2t+2}{2}=t+1\,.$$

$$\int_{0}^{2} e^{x}\,dx=\int_{-1}^{1} e^{t+1}\left(\frac{2-0}{2}\right)dt \Rightarrow=\int_{-1}^{1} e^{t+1}\,dt\,.$$

$$\int_{-1}^{1} e^{t+1}\,dx=c_1e^{t1+1}+\ c_2e^{t2+1}\ c_3e^{t3+1}+\ c_4e^{t4+1}$$

من الجدول:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -0.86113631 \quad , c_1 = 0.34785485\\
t_2 &= -0.33998104 \quad , c_2 = 0.65214515\\
t_3 &= 0.33998104 \quad , c_3 = 0.65214515\\
t_4 &= 0.86113631 \quad , c_4 = 0.34785485
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0.34785485\,f(-0.86113631)\\
+\,0.65214515f(-0.33998104)\\
+\,0.65214515f(0.33998104)\\
+\,0.34785485f(0.86113631) = 6.3890553
\end{aligned}$$

لإيجاد التكامل التحليلي:

$$\int_0^2 e^x\,dx=e^x|_0^2=e^2-e^0=6.38906$$

∴ مقدار الخطأ هو 0.0000008

واستخدمنا برنامج (1) وتحصلنا على الحل بطريقة أسهل والنتائج موضحة في الجدول (2).

n	القيمة العددية	القيمة الفعلية	مقدار الخطأ
4	6.389056	6.389056	4.768372 E-07

جدول (2)

(نتائج تربيعة جاوس عندما (n = 4))

مثال (2) : باستخدام طريقة تربيعة جاوس لتقريب التكامل الآتي $\int_1^2 ln\ xdx$ عندما $n = 4$

الحل:

$$x = \frac{(b-a)t + a + b}{2} = \frac{(2-1)t + 1 + 2}{2} = \frac{t+3}{2}.$$

$$\int_1^2 ln\ xdx = \int_{-1}^{1} ln\left(\frac{t+3}{2}\right)\left(\frac{2-1}{2}\right)dt \Rightarrow = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ln\left(\frac{t+3}{2}\right)dt\ .$$

$$\int_1^2 ln\ xdt = \frac{1}{2}\left[\ c_1 ln\left(\frac{t_1+3}{2}\right) +\ c_2 ln\left(\frac{t_2+3}{2}\right) +\ c_3 ln\left(\frac{t_3+3}{2}\right) +\ c_4 ln\left(\frac{t_4+3}{2}\right)\right].$$

الآن نعوض بقيم c, t من الجدول السابق.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) = \frac{1}{2}[0.34785485f(-0.86113631) + 0.65214515f(-0.33998104) + 0.65214515f(0.33998104) + 0.34785485f(0.86113631) \approx 0.3862945$$

القيمة المضبوطة للتكامل هي:

$$\int_1^2 ln\ xdx \approx 0.3862944$$

وهنا مقدار الخطأ يكون 0.0000001

(2) **التكامل الثنائي في المناطق المستطيلة:**

Double Integral In Rectangular Region

في حساب هذا النوع من التكامل نعتبر نهايات التكامل ثوابت وفي التكامل تعلمنا أنه في التكامل الثنائي إذا كانت الدالة متصلة بالمنطقة المستطيلة R في المستوى أي أن:

$$R=\{(x,y);\quad a\leq x\leq b\ \ ,c\leq y\leq d\}$$

لبعض الثوابت d, c, b, a .

فإنه يمكن كتابته في أي اتجاه أي على الصورة:

$$\iint_A f(x,y)dA=\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx=\int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy\,.$$

3) التكامل الثنائي في المناطق غير المستطيلة:

Double Integral In Rectangular Region

الأسلوب السابق (التكامل الثنائي في المناطق المستطيلة) يمكن تحويره لتقريب التكاملات التي على شكل:

$$\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)}f\,(x,y)dxdy \quad \text{أو} \quad \int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}f\,(x,y)dydx$$

4) التكامل الثنائي باستخدام تربيعة جاوس:

Double Integral Gaussian Quadrature

للتقليل من عدد الحسابات الدالية يمكن دمج طرق أكثر فعالية مثل تربيعة جاوس.

المثال التالي يوضح استخدام تربيعة جاوس.

مثال (3): استخدم تربيعة جاوس لتقريب التكامل:

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5}ln\,(x+2\,y)dydx \quad \text{عندما} \quad n=3$$

الحل:

بما أن التحويل الخطي $t=\frac{1}{b-a}(2x-a-\ b)$ يحول الفترة $[a,\mathrm{b}]$ إلى $[-1, 1]$

وبالتالي قبل استخدام تربيعة جاوس لتقريب هذا التكامل لابد من تحويل منطقة التكامل إلى:

$$R = \{(x, y); 1.4 \le x \le 2.0 \quad , 1.0 \le y \le 1.5\}$$
$$R = \{(u, v); -1 \le u \le 1 \quad , -1 \le v \le 1\}$$

إذا التحويل الخطي الذي ينجر ذلك هو

$$u = \frac{1}{2.0 - 1.4}(2x - 1.4 - 2.0)$$
$$v = \frac{1}{1.5 - 1.0}(2y - 1.0 - 1.5)$$

استخدام هذه التعبيرات للمتغيرات يعطي تكاملًا يمكن تطبيق تربيعة جاوس عليه.

$$\because x = 0.3u + 1.7$$
$$2y = 0.5v + 2.5$$

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} ln\,(x + 2\,y) dy dx$$
$$= 0.075 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} ln\,(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du$$

صيغة تربيعة جاوس لـ $n = 3$ لكل من v, u يتطلب منا استخدام عند

$$u_1 = v_1 = -0.774596693$$
$$, u_2 = v_2 = 0$$
$$, u_3 = v_3 = 0.774596693$$

دوال الوزن المرافقة هي:

$$c_{3,1} = c_{3,3} = 0.555555556 \quad , \quad c_{3,2} = 0.888888889$$

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} ln\,(x+2\,y)dydx$$
$$= 0.075\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{3,i}\ \ c_{3,j}\ In\left(0.3u_i+0.5v_j+4.2\right)$$
$$= 0.075[\Big(0.555555556\ \big(0.555555556\ In\ (0.3(-0.774596693)$$
$$+ 0.5(-0.774596693)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.888888889\big(0.555555556\ In(0.3(0)+0.5(-0.774596693)$$
$$+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.555555556\big(0.555555556\ In(0.3(0.774596693)$$
$$+0.5(-0.774596693)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.555555556\big(0.888888889 In(0.3(-0.774596693)+0.5(0)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.888888889\big(0.888888889 In(0.3(0)+0.5(0)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.555555556\big(0.888888889 In(0.3(-0.774596693)$$
$$+0.5(0.774596693)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.888888889\big(0.555555556\ In(0.3(0)+0.5(0.774596693)+4.2)\big)\Big)$$
$$+\Big(0.555555556\big(0.555555556\ In(0.3(0.774596693)$$
$$+0.5(0.774596693)+4.2)\big)\Big)] = 0.429554531$$

القيمة الفعلية للتكامل لتسع مراتب عشرية هي:

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} ln\,(x+2\,y)dydx\ = 0.429554527$$

وبالتالي يكون مقدار الخطأ هو $-4\times\ 10^{-9}$

ملاحظة (**1**):

إن تطبيق تربيعة جاوس على $\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f\,(x,y)dydx$.

يتطلب عدة تحويلات ويكون حسابه مطولاً وبالتالي سوف تطبق برنامج (2) على المثال التالي للتوصل إلى الحل بسهولة.

مثال (4): استخدم تربيعة جاوس لتقريب التكامل $\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{y/x}\, dydx$ عندما $n = m = 5$.

القيمة الفعلية للتكامل لسبع مراتب عشرية هي:

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{y/x}\, dydx = 0.0333056$$

واستخدمنا برنامج (2) وتحصلنا على الحل بسهولة وتكون القيمة العددية الناتجة من تطبيق البرنامج هي 3.330557E-02

ملاحظة (2):

1. نجد أن الناتج الذي حصلنا عليه من البرنامج (2) يكون قريب من الحل المضبوط.

2. القيمة العددية الناتجة من تطبيق البرنامج (2) هي 3.330557E-02 وبما أن الحل المضبوط كما في المثال (4) هي 0.0333056 إذاً يكون مقدار الخطأ هو 3.352761E-08-.

(5) التكامل الثلاثي باستخدام تربيعة جاوس:

Triple Integral Gaussian Quadrature

لتقريب التكاملات الثلاثية على الشكل $\int_a^b \int_c^d \int_\propto^\beta f\,(x, y, z) dzdydx$ نجد أن تربيعة جاوس هي الطريقة المختارة، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (5): استخدم تربيعة جاوس لتقريب التكامل $\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z}\, dzdydx$ عندما $n = 2$

الحل:

بما أن التحويل الخطي $t = \frac{1}{b-a}(2x - a - b)$ يحول الفترة $[a, b]$ إلى [-1, 1]

وبالتالي قبل استخدام تربيعة جاوس لتقريب هذا التكامل لابد من تحويل منطقة التكامل إلى:

$$R = \{(x, y, z); 0 \le x \le 1 \quad ,1 \le y \le 2 \quad ,0 \le z \le 0,5\}$$

إلى:

$$R = \{(u,v,w)\,; -1 \le u \le 1 \quad ,-1 \le v \le 1 \quad ,-1 \le w \le 1\}$$

إذا التحويل الخطي الذي ينجر ذلك هو:

$$u = \frac{1}{1-0}(2x-0-1)$$
$$v = \frac{1}{2-1}(2y-1-2)$$
$$w = \frac{1}{0.5-0}(2z-0-0.5)$$

استخدام هذا التعبيرات للمتغيرات يعطي تكامل يمكن تطبيق تربيعة جاوس عليه.

$$\because\ x = \frac{1}{2}(u+1)$$
$$y = \frac{1}{2}(v+3)$$
$$z = \frac{1}{4}(w+1)$$

$$\int_0^1\int_1^2\int_0^{0.5} e^{x+y+z}\,dzdydx = 0.065\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{4}(2u+2v+w+9)}\,dwdvdu\,.$$

صيغة تربيعة جاوس لـ $n = 2$ لكل من w, v, u يتطلب منا استخدام عند

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0.5773502692$$
$$,u_2 = v_2 = w_2 = -0.5773502692$$

دوال الوزن المرافقة هي

$$c_{2,1} = 1 \qquad , \qquad c_{2,2} = 1$$

إذا

$$\int_0^1\int_1^2\int_0^{0.5} e^{x+y+z}\,dzdydx$$
$$= 0.065\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} c_{2,i}\ c_{2,j}\ c_{2,k}\,e^{\frac{1}{4}(2ui+2vj+wk+9)}$$
$$= 5.204036265$$

القيمة الفعلية للتكامل لتسع مراتب عشرية:

$$\int_0^1\int_1^2\int_0^{0.5} e^{x+y+z}\,dzdydx = 5.206446549$$

وبالتالي يكون مقدار الخطأ هو 2.4×10^{-3}

ملاحظة (3) :

إن تطبيق تربيعة جاوس على $\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\propto(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$ يتطلب عدة تحويلات ويكون حسابه مطولاً وبالتالي سوف تطبق برنامج (3) على المثال التالي للتوصل على الحل بسهولة .

مثال (6): استخدم تربيعة جاوس لتقريب التكامل $\int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2)dzdydx$ عندما $n = m = p = 5$.

القيمة الفعلية للتكامل لسبع مراتب عشرية هي:

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2)dzdydx = 0.1333333$$

واستخدمنا برنامج (3) وتحصلنا على الحل بسهولة وتكون القيمة العددية الناتجة من تطبيق البرنامج هي 0.1333333 .

ملاحظة (4) :

1. نجد أن الناتج الذي حصلنا عليه من البرنامج (3) يكون نفس الحل المضبوط.
2. القيمة العددية الناتجة من تطبيق البرنامج (3) هي 0.1333333 مطابقة للحل المضبوط كما هو المثال (6) هي 0.1333333 إذاً يكون مقدار الخطأ هو صفر .

(6) تطبيقات التكامل الثنائي Applications Double Integral

1. الحجم (volume)

إذا كانت $z = f(x,y)$ تمثل معادلة السطح، فإن $v = \iint_R f(x,y)dA$ تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى xy .

مثال (7) : أوجد حجم المجسم المحدد بالسطح التالية :

$$x = 2 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x^2 = y + z .$$

الحل:

$$v = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 - y)dydx$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
8.888888E-02	3.2	3.111111	برنامج (2) عندما $2 = m = n$
0	3.2	3.2	برنامج (2) عندما $5 = m = n$

جدول (3)

(نتائج الحجم للتكامل الثنائي)

2. المساحة (Area)

إذا كانت $f(x,y) \equiv 1$ ، فإن $A(R) = \iint_R dA$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة A .

مثال (8) : أوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y = \sqrt{x},\ y = x^3$.

الحل:

$$A(R) = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx .$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-7.220656E-03	0.4166667	0.4238873	برنامج (2) عندما $2 = m = n$
-6.301105E-04	0.4166667	0.4172968	برنامج (2) عندما $5 = m = n$

جدول (4)

(نتائج المساحة للتكامل الثنائي)

3. الكتلة (Mass):

إذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة، فإن $M(R) = \iint_R f(x\,,y)dA$

حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R .

4. العزم:

إذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة، فإن العزم بالنسبة للمحورين $y\,,x$ يعرف كما يلي:

ا

لعزم حول محور x هو:

$$M_x = \iint_R yf(x\,,y)dA$$

العزم حول محور y هو:

$$M_y = \iint_R xf(x\,,y)dA$$

5. مركز الكتلة (Center of Mass)

إذا كانت الدالة f تمثل الكثافة فإن مركز الكتلة $(x\,,y)$

$$x = \frac{M_y}{M} \qquad , \qquad y = \frac{M_x}{M}$$

مثال (9) : لوحة معدنية خفيفة تغطي منطقة مثلثيه محددة بواسطة محور x والمستقيم $x = 1$ والمستقيم $y = 2x$ في الربع الأول فإذا علمت أن كثافة اللوحة عند النقطة $(x\,,y)$ معرفة بالمعادلة $6x + 6y + 6$ جد كتلة اللوحة والعزم حول محور x والعزم حول محور y ومركز الكتلة .

الحل

أولاً : الكتلة:

$$M(R) = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)dydx$$

البرنامج	القيمة العددية	القيمة المضبوطة	مقدار الخطأ
برنامج (2) عندما $n = m = 2$	14	14	0
برنامج (2) عندما $n = m = 5$	14	14	0

جدول (5)

(نتائج الكتلة للتكامل الثنائي)

ثانياً : العزم حول x

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y(6x + 6y + 6)dydx$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
0	11	11	برنامج (2) عندما $n = m = 2$
0	11	11	برنامج (2) عندما $n = m = 5$

جدول (6)

(نتائج العزم حول محور x للتكامل الثنائي)

ثالثاً : العزم حول محور y

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x(6x + 6y + 6)dydx$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
9.536743E-07	10	9.999999	برنامج (2) عندما $n = m = 2$
0	10	10	برنامج (2) عندما $n = m = 5$

جدول (7)

(نتائج العزم حول محور y للتكامل الثنائي)

رابعاً : مركز الكتلة $(x\ , y)$

$$y = \frac{M_x}{M} \quad , \quad x = \frac{M_y}{M}$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
(0 , 0)	(0.7 , 0.8)	(0.7 , 0.8)	برنامج (2) عندما $n = m = 2$
(0 , 0)	(0.7 , 0.8)	(0.7 , 0.8)	برنامج (2) عندما $n = m = 5$

جدول (8)

(نتائج مركز الكتلة للتكامل الثنائي)

(6) عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x **ومحور** y .

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA \qquad , \qquad I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA .$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل .

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_R (x^2 + y^2) f(x,y)dA$$

مثال (10) : جد عزم القصور الذاتي حول محور x للوحة متجانسة محددة بواسطة المستقيم $y = 0$ ، والمنحنى $y = 4 - x^2$ علماً بأن الكثافة تساوي 1 .

الحل:

$$I_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y^2\, dydx$$

البرنامج	القيمة العددية	القيمة المضبوطة	مقدار الخطأ
برنامج (2) عندما $n = m = 2$	25.28395	39.009524	13.72558
برنامج (2) عندما $n = m = 5$	39.00953	39.009524	-2.708435E-04

جدول (9)

(نتائج العزم القصور الذاتي حول محور x للتكامل التنائي)

مثال (11) : جد عزم القصور الذاتي حول نقطة الأصل للوحة مثلثيه متجانسة محددة بواسطة المستقيمات $y = 0$, $y = x$, $x = 4$ علماً بأن الكثافة تساوي 1.

الحل:

$$I_0 = \int_{0}^{4}\int_{0}^{x} (x^2 + y^2)\, dydx$$

البرنامج	القيمة العددية	القيمة المضبوطة	مقدار الخطأ
برنامج (2) عندما $n = m = 2$	85.33333	85.333333	7.629395E-06
برنامج (2) عندما $n = m = 5$	85.33334	85.333333	7.629395E-06

جدول (10)

(نتائج عزم القصور الذاتي حول نقطة الأصل للتكامل التنائي)

7) تطبيقات التكامل الثلاثي Applications Triple Integral

1. الكتلة (Mass):

إذا كانت الدالة $p(x,y,z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم فإن:

$$M(s)=\iiint_s p(x,y,z)dv$$

2. الحجم (volume):

إذا كانت $f(x,y,z)=1$ ، فإن:

$$V(s)=\iiint_s dv$$

3. عزم المجسم s بالنسبة للمستويات $yz,\ xz,\ xy$ يعرف كما يلي:

$$M_{xy}=\iiint_s zp(x,y,z)dv \quad , \quad M_{xz}=\iiint_s yp(x,y,z)dv$$

$$,M_{yz}=\iiint_s xp(x,y,z)dv$$

حيث أن $p(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم s .

4. مركز الكتلة هو النقطة $p(x,y,z)$.

حيث أن:

$$x=\frac{M_{yz}}{M} \quad , \quad y=\frac{M_{xz}}{M} \quad , \quad z=\frac{M_{xy}}{M}$$

5. عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور z,y,x

$$I_y=\iiint_s (x^2+z^2)p(x,y,z)dv$$

$$,I_x=\iiint_s (y^2+z^2)p(x,y,z)dv$$

$$,I_z=\iiint_s (x^2+y^2)p(x,y,z)dv$$

حيث أن $p(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم s .

مثال (12) : إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega=\{(x,y,z):0\le x\le 1\ ,x^2\le y\le x\ ,x-y\le z\le x+y\}$$

فأوجد ما يلي:

أ. حجم المنطقة Ω.

ب. الكتلة إذا كانت الكثافة $p(x,y,z) = x + 2y + 4z$.

ج. عزم المجسم Ω بالنسبة للمستويات $yz,\ xz,\ xy$.

د. مركز الكتلة .

الحل

أ. حجم المنطقة Ω

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} dzdydx$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-5.555615E-03	0.133333	0.1388889	برنامج (3) عندما $2 = p = m = n$
-5.960464E-08	0.133333	0.1333334	برنامج (3) عندما $5 = p = m = n$

جدول (11)

(نتائج الحجم للتكامل الثلاثي)

ب . الكتلة الكلية $M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} (x + 2y + 4z)dzdydx$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-9.942675E-02	0.559524	0.6589507	برنامج (3) عندما $2 = p = m = n$
5.960464E-08	0.559524	0.5595239	برنامج (3) عندما $5 = p = m = n$

جدول (12)

(نتائج الكتلة الكلية للتكامل الثلاثي)

ج . عزم المجسم Ω

1 . بالنسبة للمستوى xy يمكن إيجاد كما يلي :

$$M_{xy} = \int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}\int_{x-y}^{x+y} (xz + 2yz + 4z^2)dzdydx$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-0.1378491	0.44497	0.5828191	برنامج (3) عندما $2 = p = m = n$
-3.665686E-06	0.44497	0.4449737	برنامج (3) عندما $5 = p = m = n$

جدول (13)

(نتائج عزم المجسم Ω بالنسبة للمستوى xy للتكامل الثلاثي)

2 . بالنسبة للمستوى xz

$$M_{xz} = \int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}\int_{x-y}^{x+y} (xy + 2y^2 + 4yz)dydxdz$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-0.1125	0.338889	0.451389	برنامج (3) عندما $2 = p = m = n$
0	0.338889	0.338889	برنامج (3) عندما $5 = p = m = n$

جدول (14)

(نتائج عزم المجسم Ω بالنسبة للمستوى xz للتكامل الثلاثي)

3 . بالنسبة للمستوى yz

$$M_{yz} = \int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}\int_{x-y}^{x+y} (x^2 + 2xy + 4xz)dxdzdy$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
-0.1173725	0.385714	0.5030865	برنامج (3) عندما $n = m = p = 2$
0	0.385714	0.3857144	برنامج (3) عندما $n = m = p = 5$

جدول (15)

(نتائج عزم المجسم Ω بالنسبة للمستوى yz للتكامل الثلاثي)

د . مركز الكتلة

$$(x, y, z) = (\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M})$$

مقدار الخطأ	القيمة المضبوطة	القيمة العددية	البرنامج
(0,0,0)	(0.8,0.6,0.8)	(0.8,0.6,0.8)	برنامج (3) عندما $n = m = p = 2$
(0,0,0)	(0.6,0.6,0.8)	(0.6,0.6,0.8)	برنامج (3) عندما $n = m = p = 5$

جدول (16)

(نتائج مركز الكتلة للتكامل الثلاثي)

الخاتمة:

لقد تطرقنا في هذه الورقة البحثية إلى دراسة تربيعة جاوس ووضحنا كيفية إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة والمتعددة وتطبيقاتها ومنها (الحجم، المساحة، الكتلة، مركز الكتلة، عزم القصور الذاتي). وذلك بربط كل نوع ببرنامج للتوصل إلى الحل بسهولة.

ومن خلال النتائج التي تحصلنا عليها من هذه الطريقة يتضح أنه كلما كان العدد n أكبر، كلما كان الحل أكثر دقه.

ومن هذا تم التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات وهي:

1- تربيعة جاوس تعتبر من أفضل الطرق في حل التكاملات المفردة والمتعددة بالتحليل العددي.

2- كلما زاد عدد الفترات الجزئية كلما كانت النتائج أكثر دقه.

3- استعمال التحليل العددي في حل التكاملات المفردة والمتعددة يعمل على زيادة السرعة والدقة.

المصادر والمراجع:

المراجع المترجمة:

1ـ أيان جاكس وكولن جد، ترجمة (علي محمد إبراهيم ، محمد ماهر علي النجار)، التحليل العددي، منشورات جامعة طرابلس، 1992 م.

2ـ دوغلاس فايرس وريتشارد بير دسن، ترجمة (رمضان محمد جهيمة، كمال أبو القاسم أبودية)، التحليل العددي، منشورات ELGA، 2001 م.

المراجع الأجنبية :

1- F. G. Curtis and O. W. Patrick, Applied Numerical Analysis, 5rd edition. Copyright, 1994.